

## EL LAGRANGIANO, ESE MÁGICO OBJETO MATEMÁTICO

Ing Luis A. de Vedia, Académico Titular

Platón, el filósofo griego que vivió en Atenas entre  $\approx 429$  y  $347$  AC, es decir aproximadamente un siglo y medio posterior a Pitágoras, consideraba que las proposiciones matemáticas, aquellas que podían considerarse como verdades irrefutables, habitaban un mundo diferente del de las cosas físicas. Hoy podríamos referirnos a ese mundo como el de las *formas matemáticas*. Estructuras físicas tales como triángulos, esferas, cubos, tetraedros, etc. podrían aproximarse a aquellas formas ideales muy ajustadamente, pero no de manera exacta o idéntica. Esto nos remite a la vieja controversia sobre si ese mundo de formas matemáticas existe realmente aunque no forme parte de nuestro universo físico. En otras palabras, cuando el matemático encuentra una fórmula para resolver un problema o propone un postulado, inventa esa fórmula o ese postulado o lo descubre? Observemos que cuando nos referimos a nuevas ideas matemáticas, solemos referirnos a su descubrimiento más que a su invención, lo que sugiere que esas ideas ya existían antes de ser descubiertas. Más allá de esta controversia, es indudable que la idea que las formas matemáticas, sean estas de características geométricas o abstractas, poseen una identidad, permanencia y universalidad de las que otras ideas o conceptos en general carecen.

Quiero referirme aquí a una de esas ideas o conceptos que habitan ese mundo especial de formas matemáticas y que ha sido tan fértil para interpretar múltiples aspectos de nuestra realidad física más fundamental, que si bien fue dada a luz por el genio de un hombre, nos queda la convicción que esa idea trasciende la imaginación de quien la formuló y tiene una identidad propia tan poderosa que no podemos dejar de considerarla como un “objeto” en ese mundo de formas abstractas.

Quien la concibió fue Joseph–Louis Lagrange, que vivió entre 1736 y 1813, nacido en Turín, de ascendencia francesa e italiana, aunque predominantemente francesa y a quien Napoleón Bonaparte consideró el matemático más grande del siglo XVIII y a quien le otorgara numerosas distinciones. Cabe consignar que Lagrange fue ante todo un matemático teórico, no un geómetra. Es así que su inclinación analítica se manifiesta claramente en su obra maestra “*Mécanique analytique*”, que fue publicada en París en 1788 cuando Lagrange tenía ya 52 años. En el prefacio de esta obra podía leerse “*No se encontrarán diagramas en esta obra*” poniendo de manifiesto su inclinación teórica no obstante que más adelante expresa que la ciencia mecánica podría considerarse como la geometría de un espacio de cuatro dimensiones, tres espaciales y una temporal, adelantándose así en más de un siglo al resurgimiento que de este concepto hizo Alberto Einstein tan fértil empleo en 1905 con la formulación de su teoría especial de la relatividad.

El objeto matemático al cual me refiero es el Lagrangiano, que definido en su forma más general no es otra cosa que la diferencia entre la energía cinética de un sistema de partículas y su energía potencial. Si como es habitual en la literatura técnica designamos con  $T$  a la energía cinética del sistema y con  $V$  a su energía potencial, el Lagrangiano, que denotaremos como  $L$ , resulta

$$L = T - V$$

Recordemos que la energía cinética es la energía que el sistema de partículas posee debido a su movimiento mientras que la energía potencial tiene que ver con su posición en un dado campo de fuerzas, por ejemplo en el campo gravitatorio terrestre.G

Ahora bien, la definición de Lagrangiano no tendría mayor significación sino fuese por un principio de la naturaleza llamado *Principio de Mínima Acción* que hoy constituye la base conceptual de lo que se conoce como *Cálculo de Variaciones* desarrollado por Lagrange hacia 1760 y utilizado más tarde hacia 1834 y 1835 por el matemático irlandés William Rowan Hamilton para desarrollar las ecuaciones del movimiento de un sistema de partículas que hoy llevan su nombre.

Aquel principio de la naturaleza tiene una historia curiosa. Se acredita su formulación al matemático y filósofo francés Pierre Louis Maupertius quien hizo referencia al mismo entre 1744 y 1746. El matemático de origen suizo Leonard Euler también lo discutió en 1744 y existe evidencia que 39 años antes el matemático y filósofo alemán Gottfried Wilhelm Leibnitz ya lo había considerado. Podemos remitirnos a antecedentes más remotos si tenemos en cuenta que Euclides y más tarde Heron de Alejandría hicieron una aplicación del mismo a la óptica como lo hizo Pierre de Fermat en el siglo XVII cuando expresó que la luz viaja entre dos puntos empleando siempre el camino que demanda el mínimo tiempo. El principio de mínima acción es un caso particular de una formulación más general que dice que cuando un sistema de partículas evoluciona bajo la acción de un sistema de fuerzas entre un instante  $t_1$  y un instante  $t_2$ , lo hace siempre de modo que la expresión

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

es un extremo, es decir un máximo o un mínimo, donde  $L$  es el Lagrangiano al que hemos hecho referencia más arriba. Este principio se conoce como *Principio de Hamilton* y el valor  $I$  es lo que se denomina *Acción* y nos dice que de todas las posibles trayectorias que el sistema podría describir desde su posición en el instante  $t_1$  hasta su posición en el instante  $t_2$ , describirá aquella para la cual la Integral  $I$  es un máximo o un mínimo.

Lo más notable de este principio es que del mismo surgen, mediante la aplicación del cálculo variacional, las ecuaciones del movimiento de un sistema de partículas en una forma abstracta pero particularmente útil para el estudio de sistemas conservativos, es decir sistemas en lo que no hay mecanismos de disipación de energía tales como fricción, deformación plástica, etc. Estas ecuaciones se conocen como ecuaciones de Lagrange. De hecho, la segunda ecuación del movimiento de Newton está contenida en aquellas y puede obtenerse a partir de las mismas.

Observemos el rol fundamental que el Lagrangiano juega en todo esto. La “magia” de este objeto matemático nos sorprende y deslumbra cuando advertimos que a partir de él podemos deducir principios universales del comportamiento de los sistemas físicos cualquiera sea su naturaleza, desde sistemas de partículas newtonianas, sistemas de partículas cargadas en campos electromagnéticos o sistemas de partículas elementales en campos de fuerza nucleares o electro-débiles. Esta aptitud del Lagrangiano radica en la relación que existe entre invariancias que la estructura matemática del Lagrangiano puede exhibir frente a cambios en algunas de las variables que intervienen en su definición y simetrías que los sistemas físicos pueden obedecer.

Existen tres teoremas fundamentales relacionados con estos conceptos. El primero nos dice que si el Lagrangiano de un sistema es invariante, es decir conserva su estructura matemática frente a traslaciones en el espacio según una dada dirección, esto implica que la cantidad de movimiento del sistema se conserva según esa dirección. El segundo teorema nos dice que si el Lagrangiano es invariante frente a rotaciones en el espacio alrededor de un eje, lo que se conserva es el momento cinético del sistema según dicho eje y finalmente que si el Lagrangiano es invariante en el tiempo lo que se conserva es la energía total del sistema. En otras palabras, los tres teoremas de conservación de la mecánica clásica newtoniana están estrechamente vinculados a las simetrías de un sistema. En efecto, si por ejemplo un sistema exhibe simetría esférica, el segundo teorema mencionado nos dice que el sistema que el momento cinético se conserva para cualquier dirección del espacio y lo correspondiente cabe decir para simetrías frente a traslaciones en el espacio o en el tiempo.

Cabe destacar lo ya mencionado que estas relaciones entre simetrías y magnitudes conservadas desbordan la mecánica de los sistemas newtonianos y constituyen un poderoso instrumento para el estudio de sistemas de la más diversa naturaleza. De hecho, las así llamadas *teorías de gauge*, de las cuales la *electrodinámica cuántica* es la más paradigmática y el molde en que se han fundido luego las otras teorías de la física de partículas elementales, se basan precisamente en las simetrías que los distintos sistemas exhiben frente a las transformaciones de gauge que no son en última instancia más que desplazamientos en alguno de sus parámetros lo que nos habla de la potencia y la estética notable que posee este maravilloso objeto matemático llamado Lagrangiano.

Señalemos para finalizar que el Lagrangiano constituye un concepto de gran importancia en el estudio de fenómenos tan extraños a nuestra intuición física como el mecanismo de Higgs que provee de masa a las partículas elementales y que en esencia tiene que ver con una ruptura espontánea de simetrías. Que estos objetos matemáticos nos describan de forma tan precisa y elegante la realidad física más profunda, no es una poderosa sugerencia que ya estaban “ahí” antes de ser descubiertos?

### ***Referencias***

1. R.Penrose, “*The road to reality*” Alfred A. Knopf, N.Y. 2005.
2. H.Goldstein, “*Classical Mechanics*”, 2a.Ed., Addison Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1980.

3. R.P.Feynman; R.Leighton; M.Sands, "*Feynman Lectures on Physics*", Vol.1. Addison Wesley, N.Y. 1963.
4. L.Sklar, "*Philosophy of Physics*", Dimensions of Philosophy Series, Oxford University Press, 1992.
5. L.H.Ryder, "*Quantum Field Theory*" 2a. Edición, Cambridge University Press, 2003.
6. G.D.Coughland; J.E.Dodd, "*The ideas of particle physics: An introduction for scientists*" 2a. Edición, Cambridge University Press, 1991.
7. L.A. de Vedia "*Una introducción informal a la Mecánica Cuántica y su filosofía*" Amazon-Kindle Edition, 2020.
8. L.Susskind "All Stanford Lectures in order"  
[https://www.youtube.com/playlist?list=PLQrxduI9Pds1fm91Dmn8x1lo-O\\_kpZGk8](https://www.youtube.com/playlist?list=PLQrxduI9Pds1fm91Dmn8x1lo-O_kpZGk8)